Донецкий Национальный Технический Университет

Лабораторная работа № 5

**«**Нелинейная оптимизация. Построение моделей.

Классическая теория оптимизации**»**

Выполнил:

Лысенко А. С.

Проверила:

Скрипник Т.В.

Покровск 2016

***Задание №1. Построение и исследование моделей.***

1.Построить математическую модель оптимизационной задачи, сделать поясняющий рисунок.

2.Используя аппарат математического анализа (исследование на экстремум) найти и обосновать решение задачи.

*Замечание.*

1.Если при исследовании на экстремум возникают громоздкие уравнения, то рекомендуется использовать следующий прием: выражение, содержащее только константы из условия, заменить на новую одну константу, после решения задачи сделать обратную замену. *Например,* уравнение

(а2+b2sin(H+a))3x2+a/(b2+H3)\*y2=cos(2b),

где а, b, Н –константы из условия задачи, x,y –неизвестные,

рационально заменить на уравнение

cx2+dy2=g, где

c=(а2+в2sin(H+a))3, d=x2+a/(b2+H3), g=cos(2b).

2.Если описанный прием не упрощает принципиально задачу, то, по согласованию с преподавателем, можно заменить заданные в условии константы конкретными числовыми значениями. Это допустимо только в виде исключения в задачах со сложными для решения уравнениями.

**Варианты задания №1.**

4. Определить параметры прямоугольного металлического бака (закрытого, с крышкой), заданного веса К т, с толщиной стенок Р см из металла с удельным весом С кг/м3, имеющего максимальную вместимость.

***Решение***

Неизвестные:

x- ширина

y - длина

z – высота

Ограничения:

K – вес

P – толщина стенок

С – металл с удельным весом

V = x\*y\*z - объём прямоугольного металлического бака

P = S\*z

S = x \* y

C = K/V – удельный вес // const т.к. табличное значение

K = С\*V = C\*x\*y\*z;

P = K/C - объём прямоугольного металлического бака

Функция цели – параметры прямоугольного металлического бака

F = x12+(x2-1)2-2x32 🡪 max

F = x2+(y-1)2-2z2 🡪 max

z = V/(x\*y)

F = x2+(y-1)2-2 V/(x\*y)2 🡪 max

(y – 1)2 = y2 - 2y + 1

F’x = 0

F’y = 0

или

F’x = 2x + 1- 2 V/2xy= 0

F’y = 2y + 1- 2 V/2xy= 0

2x + 1 = 2V/2xy

x + ½ = V/xy

x = - ½ + V/xy

x2y = - x2y/2 + V

x2y + x2y/2 =V

x2 + x2/2 = V/y

3x2/2 = V/y

x2 = 3V/2y

x =

2\* + 1 – 2 V/2\*y = 0

4 \* 3V/2y + 1 – 4V2/4\*3V/2y \*y2 = 0

12V/2y + 1 – 4V2/12V/2y3 = 0

12V/2y + 1 – V/6y3 = 0

12V/2y –V/6y3 = -1

12/2y – 1/6y3 = -1/V

6y – 0.54y = 1/V

6.54y = 1/V

y = 0.153/V

x =

x =

x =

x = 3V/0.674

x= 4.45V

|  |  |
| --- | --- |
| F''xx | F''xy |
| F''yx | F''yy |

|  |  |
| --- | --- |
| 2 + 1 - 2V/2y | 2 + 1 - 2V/2x |
| 2 + 1 - 2V/2y | 2 + 1 - 2V/2x |

В найденной точке

2 + 1 – 2V/2\*0.153/V

3 – 2V/0.306/V

3 – 2V\*V/0.306

3 – 2V2/0.306 // в точке xx и yx

2 + 1 - 2V/2\*4.45V

3 – 2V/8.9V // в точке xy и yy

V = 4.45V\*0.153/V\* V/(4.45V\*0.153/V)

0.68V/V\*V/0.68V/V = 0.68\*V/0.68 =V// V=V => x и y верно найдены

K = CV, где С – const , a V объем

Например бак на 1000л =1м3 будет иметь параметры

x = 4.45\*1 = 4.45м // ширина

y = 0.153/1 = 0.153м // длина

z = 1/4.45\*0.153 = 1.47м // высота

**Задание №2. Исследование функций на экстремум при наличии ограничений**

1.Исследовать на экстремум заданную функцию при наличии ограничений.

2.Привести, по возможности, поясняющие рисунки.

**Варианты задания №2.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № варианта | Функция цели | Ограничения |
| 4 | f(x1,x2,x3) = x12+(x2-1)2-2x32 | x1,x2,x3 >= 0 |

Шаг №1. Определение стационарных точек.  
Найдем экстремум функции F(X) = x12+(x2-1)2-2\*x32, используя функцию Лагранжа:  
где F(X) - целевая функция вектора X  
φi(X) - ограничения в неявном виде (i=1..n)  
В качестве целевой функции, подлежащей оптимизации, в этой задаче выступает функция:  
F(X) = x12+(x2-1)2-2\*x32  
Перепишем ограничение задачи в неявном виде:  
φ1(X) = x1 = 0  
φ2(X) = x2 = 0  
φ3(X) = x3 = 0  
Составим вспомогательную функцию Лагранжа:  
L(X, λ, μ) = x12+(x2-1)2-2\*x32 + μ1\*(-(x1)) + μ2\*(-(x2)) + μ3\*(-(x3))+μ4x1+μ5x2+μ6x3  
Необходимым условием экстремума функции Лагранжа является равенство нулю ее частных производных по переменным хi и неопределенным множителям  
Составим систему:  
∂L/∂x1 = 2\*x1-μ1 = 0  
∂L/∂x2 = 2\*x2-μ2-2 = 0  
∂L/∂x3 = -4\*x3-μ3 = 0  
μ1(x1) = 0, μ1 ≥ 0  
μ2(x2) = 0, μ2 ≥ 0  
μ3(x3) = 0, μ3 ≥ 0  
μ4x1=0, μ4 ≥ 0  
μ5x2=0, μ5 ≥ 0  
μ6x3=0, μ6 ≥ 0  
Решим следующие подзадачи:  
Подзадача №1  
Решим следующую систему уравнений:  
2\*x1-μ1 = 0  
2\*x2-μ2-2 = 0  
-4\*x3-μ3 = 0  
μ1(x1) = 0, μ1 ≥ 0  
Рассмотрим два варианта:  
a) μ1 ≠ 0  
Теперь необходимо подобрать такие μ, чтобы выполнялись все условия. Если подобрать такие значения невозможно, то решение не существует.  
b) μ1 = 0  
Теперь необходимо подобрать такие xj, чтобы выполнялись все условия. Если подобрать такие значения невозможно, то решение не существует.  
Подзадача №2  
Решим следующую систему уравнений:  
2\*x1-μ1 = 0  
2\*x2-μ2-2 = 0  
-4\*x3-μ3 = 0  
μ2(x2) = 0, μ2 ≥ 0  
Рассмотрим два варианта:  
a) μ2 ≠ 0  
Теперь необходимо подобрать такие μ, чтобы выполнялись все условия. Если подобрать такие значения невозможно, то решение не существует.  
b) μ2 = 0  
Теперь необходимо подобрать такие xj, чтобы выполнялись все условия. Если подобрать такие значения невозможно, то решение не существует.  
Подзадача №3  
Решим следующую систему уравнений:  
2\*x1-μ1 = 0  
2\*x2-μ2-2 = 0  
-4\*x3-μ3 = 0  
μ3(x3) = 0, μ3 ≥ 0  
Рассмотрим два варианта:  
a) μ3 ≠ 0  
Теперь необходимо подобрать такие μ, чтобы выполнялись все условия. Если подобрать такие значения невозможно, то решение не существует.  
b) μ3 = 0  
Теперь необходимо подобрать такие xj, чтобы выполнялись все условия. Если подобрать такие значения невозможно, то решение не существует.  
Шаг №2. Проверка условий Куна-Таккера.  
*Теорема Куна-Таккера*. Чтобы найденный план X0 был решением задачи необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор μ0 такой, что пара (X0, μ0) для всех X ≥ 0 и μ ≥ 0.  
L(X, μ0) ≤ L(X0, μ0) ≤ L(X0, μ)  
Чтобы функция двух векторных переменных имела седловую точку, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7bdL(X%5e%7b0%7d,\mu%5e%7b0%7d)%7d%7bdx_%7bj%7d%7d%20\ge%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=x_%7bj%7d%5e%7b0%7d\frac%7bdL(X%5e%7b0%7d,\mu%5e%7b0%7d)%7d%7bdx_%7bj%7d%7d%20=%200,%20x_%7bj%7d%5e%7b0%7d%20\ge%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7bdL(X%5e%7b0%7d,\mu%5e%7b0%7d)%7d%7bd\mu%20_%7bj%7d%7d%20\le%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=x_%7bj%7d%5e%7b0%7d\frac%7bdL(X%5e%7b0%7d,\mu%5e%7b0%7d)%7d%7bd\mu%20_%7bj%7d%7d%20=%200,%20\mu%20_%7bj%7d%5e%7b0%7d%20\ge%200  
Шаг №3. Определение вида экстремума.  
Для функции L(x, λ, μ) находят матрицу Гессе HL. Если матрица HL положительно определена - найденная точка x является точкой минимума, если матрица HL отрицательно определена - найденная точка x является точкой максимума.

F(X) = x1^2+(x2-1)^2-2\*x3^2  
1. Найдем частные производные.  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%20F(X)%7d%7bx_%7b1%7d%7d%20=%202\cdot%20x_%7b1%7d  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%20F(X)%7d%7bx_%7b2%7d%7d%20=%202\cdot%20x_%7b2%7d-2  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%20F(X)%7d%7bx_%7b3%7d%7d%20=%20-4\cdot%20x_%7b3%7d  
2. Решая систему, получим стационарную точку:  
X0 = (0; 1; 0)  
3. Найдем вторые частные производные.  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7dF(X)%7d%7b%20\partial%5e%7b2%7dx_%7b1%7d%5e%7b2%7d%7d%20=%202  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7dF(X)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%20\partial%20x_%7b2%7d%7d%20=%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7dF(X)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%20\partial%20x_%7b3%7d%7d%20=%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7dF(X)%7d%7b%20\partial%5e%7b2%7dx_%7b2%7d%5e%7b2%7d%7d%20=%202  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7dF(X)%7d%7b%20\partial%20x_%7b2%7d%20\partial%20x_%7b3%7d%7d%20=%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7dF(X)%7d%7b%20\partial%5e%7b2%7dx_%7b3%7d%5e%7b2%7d%7d%20=%20-4  
Матрица Гессе.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| G(X)= | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 2 | 0 | 0 | | 0 | 2 | 0 | | 0 | 0 | -4 | |  | |

Вычисляем значения для точки X0(0; 1; 0)  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7dF(X)%7d%7b%20\partial%5e%7b2%7dx_%7b1%7d%5e%7b2%7d%7d(X%5e%7b0%7d)%20=%202  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7dF(X)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%20\partial%20x_%7b2%7d%7d(X%5e%7b0%7d)%20=%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7dF(X)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%20\partial%20x_%7b3%7d%7d(X%5e%7b0%7d)%20=%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7dF(X)%7d%7b%20\partial%5e%7b2%7dx_%7b2%7d%5e%7b2%7d%7d(X%5e%7b0%7d)%20=%202  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7dF(X)%7d%7b%20\partial%20x_%7b2%7d%20\partial%20x_%7b3%7d%7d(X%5e%7b0%7d)%20=%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7dF(X)%7d%7b%20\partial%5e%7b2%7dx_%7b3%7d%5e%7b2%7d%7d(X%5e%7b0%7d)%20=%20-4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| G(0; 1; 0)= | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 2 | 0 | 0 | | 0 | 2 | 0 | | 0 | 0 | -4 | |  | |

Определяем диагональные миноры:  
D1 = a11 = 2  
D2 = a11a22 - a21a12 = 4  
D3 = -16  
Рассмотрим матрицу -G(X0).  
Поскольку диагональные миноры имеют различные знаки, то о выпуклости или вогнутости функции ничего сказать нельзя.